САБАҚ № 14

Бұл сабақта сыртқы тұрпаттарды тегіс көпбейне бойынша интегралдауды қарастырамыз. Интегралды есептегенде пайдаланатын *негізгі формула*:

$$\int_M \omega^k = \int_{\varphi(M)} \varphi * \omega^k$$

Яғни, M-ді оның бейнесі $\varphi(M)$-ге, ω^k тұрпатты жаңа $\varphi * \omega^k$ тұрпатқа ауыстырса интегралдың мәні сақталады.

Жаттығу 1. *$\omega = xy^2dx$ дифференциалдық тұрпатты бірлік шеңбердің бірінші ширектегі γ доғасы бойымен интегралдаңыз.*

Шешуі. Бірлік шеңбердің бірінші ширектегі доғасының бір картасын

$$\varphi(t): \begin{cases} x = cost, \\ y = sint, \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

етіп таңдайық. Бұл карта шеңбердің доғасын $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ интервалға бейнелейді.

Онда $\varphi * \omega = -\, cost\, sin^3 tdt$ және негізгі формуланы қолдансақ:

$$\int_\gamma xy^2dx = \int_{(0;\frac{\pi}{2})} -\, cost\ \ sin^3t\, dt$$

Теңдіктің оң жағындағы интеграл анықталған интеграл болады. Оның мәні:

$$\int_{(0;\frac{\pi}{2})} -\, cost\ \ sin^3tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\, cost\, sin^3t\, dt = -\frac{sin^4t}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}$$

Жаттығу 2. *$\omega = ydx + zdy + xdz$ дифференциалдық тұрпатты бұрыштық жылдамдығы – 1, бірқалыпты жылдамдығы - b, радиусы a -ға тең винттік сызықтың бір айналым жасаған γ бұрандасының бойымен интегралдаңыз.*

Шешуі. Винттік сызықтың картасын 1-семинар сабақта 9-жаттығуда

$$\begin{cases} x = bt, \\ y = a\,cost, \\ z = a\,sint, \end{cases} \qquad t \in (0; 2\pi)$$

келтіргенбіз. Бұл карта винттік сызықтың бір айналым жасаған бұрандасын $(0; 2\pi)$ интервалға бейнелейді. dx, dy, dz анықтаймыз:

$$dx = b\,dt, \qquad dy = -a\,sint\,dt, \qquad dz = a\,cost\,dt.$$

Түрлендіруді φ арқылы белгілеп,

$$\varphi * \omega = (abcost - a^2 sin^2 t + abt\,cost)dt$$

негізгі формуланы қолдансақ:

$$\int_{\gamma} ydx + zdy + xdz = \int_{(0;2\pi)} (ab\,cost - a^2 sin^2 t + abt\,cost)dt$$

Теңдіктің оң жағындағы интеграл анықталған интеграл болады. Оның мәні:

$$\int_{(0;2\pi)} (ab\,cost - a^2 sin^2 t + abt\,cost)dt =$$

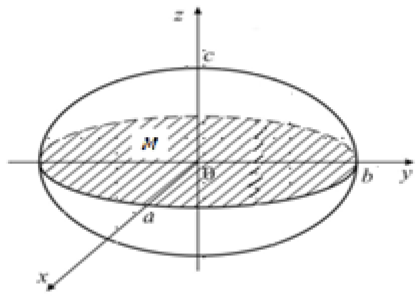
$$= \int_0^{2\pi} (ab\,cost - a^2 sin^2 t + abt\,cost)dt = -a^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4} sin2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} == -\pi a^2$$

Жаттығу 3. *$\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$ дифференциалдық тұрпатты $M: \frac{x^2}{a^2} + + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоидтың сыртымен интегралдаңыз.*

Шешуі. Эллипсоидтың картасын

$$\varphi(u, v): \begin{cases} x = a\,sinu\,cosv, \\ y = b\,cosu\,cosv, \\ z = c\,sinv \end{cases} \qquad 0 < u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

деп таңдайық. Бұл карта – жартылай шеңберсіз сфера. Сондықтан, берілген тұрпаттың эллипсоид бойынша интегралы таңдалған карта бойынша алынған интегралға тең болады. Себебі, жартылай шеңбер екі еселі интегралдың мәніне әсер етпейді. $\varphi(u, v)$ карта бойынша dx, dy, dz анықтаймыз:



$$\begin{cases} dx = a(cosu\, cosv\, du - sinu\, sinv\, dv), \\ dy = -b(sinu\, cosv\, du + cosu\, sinv\, dv), \\ dz = c \cdot cosv\, dv, \end{cases} \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

Демек,

$$\varphi * \omega^2 = -\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) cosv\, du \wedge dv$$

Ендеше

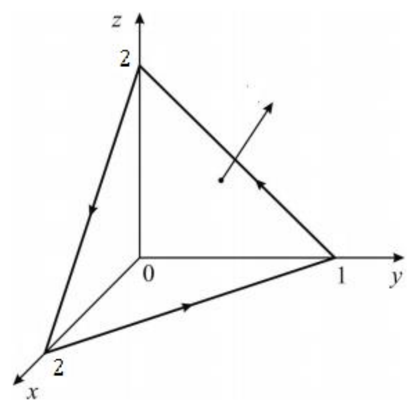
$$\int\limits_M \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z} = \int\limits_{\varphi(M)} \varphi * \omega^2 =$$

$$= -\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \iint_{(0;2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)} cosv\, du \wedge dv =$$

$$= -\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right) \int\limits_0^{2\pi} du \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosvdv = -4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

Жаттығу 4. $d\omega^2 = (x + z)dy \wedge dz + (x + 3y)dz \wedge dx + ydx \wedge dy$ *дифференциалдық тұрпатты* $x + 2y + z = 1$ *жазықтықтың бірінші октанттағы бөлігінің жоғарғы жағымен интегралдаңыз.*

Шешуі. Жазықтықтың картасын жазайық:



$$\varphi(u,v): \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 1 - u - 2v \end{cases} \quad 0 < u < 2, \;\; 0 < v < 1$$

$\varphi(u,v)$ карта бойынша dx, dy, dz анықтаймыз:

$$\begin{cases} dx = du, \\ dy = dv, \\ dz = -du - 2dv, \end{cases} \quad 0 < u < 2, \;\; 0 < v < 1$$

Демек,

$$\varphi * \omega^2 = (1 + u + 2v)\, du \wedge dv$$

Ендеше

$$\int_M d\omega^2 = \int_{\varphi(M)} \varphi * \omega^2 =$$

$$= \iint_{(0;2)\times(0;1)} (1+u+2v)\, du \wedge dv = \int_0^2 du \int_0^1 (1+u+2v)dv = 5$$

Стокс формуласы деп

$$\int_{\partial M} \omega^k = \int_M d\omega^k$$

теңдігін айтады. Мұнда ∂M - M көпбейненің бағытталған шеті, оның бағыты M көпбейненің бағытымен келісілген. $d\omega^k$ - ω^k тұрпаттың сыртқы дифференциалы.

Тапсырмалар

1. $\omega^2 = 3xydx\wedge dy - 6yzdy\wedge dz + zxdz\wedge dx$ екінші ретті тұрпатты $x^2 + y^2 = z(1-z)$ сфераның сыртымен интегралдаңыз.
2. $\omega = sinydx + sinxdy$ дифференциалдық тұрпатты $A(0;\pi)$ және $B(\pi;0)$ нүктелерін қосатын кесіндінің бойымен интегралдаңыз.
3. $\omega^2 = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$ дифференциалдық тұрпатты $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сфераның сыртымен интегралдаңыз.
4. $\omega^2 = x^2y^2zdx\wedge dy$ дифференциалдық тұрпатты $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сфераның $z < 0$ төменгі жартысының сыртымен интегралдаңыз.
5. $\omega^2 = x^2dy\wedge dz + z^2dx\wedge dy$ дифференциалдық тұрпатты $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x > 0, y < 0$ сфераның бөлігінің сыртымен интегралдаңыз.
6. $\omega^2 = (x^2 + z^2)dy\wedge dz$ дифференциалдық тұрпатты $x = \sqrt{9 - y^2}$ цилиндрлік беттің $z = 0,\ z = 2$ жазықтықтармен шектелген бөлігінің сыртымен интегралдаңыз.
7. $\omega^2 = zdx\wedge dy$ дифференциалдық тұрпатты $\frac{x^2}{4} + + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ эллипсоидтың сыртымен интегралдаңыз.